Universidad Simón Bolívar
Departamento de Cómputo Científico y Estadística
CO3121 Probabilidad para Ingenieros
Preparaduría Semana 9.

1.(5.6) Supongamos que y_1 y y_2 tienen la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} ky_1y_2, & 0 \le y_1 \le 1, 0 \le y_2 \le 1 \\ 0, & otro\ caso \end{cases}$$

a. Encuentre el valor de k para el cual la expresión es una función de densidad de probabilidad.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2)\, dy_2\, dy_1 = 1 \;\rightarrow\; \int_0^1\int_0^1 ky_1y_2\, dy_2\, dy_1 = \int_0^1 \frac{k}{2}y_1\, dy_1 = \frac{k}{4} = 1 \;\rightarrow\; \boxed{k = 4}$$

b. Encuentre la función de distribución conjunta para y_1, y_2.

Para $y_1 < 0$ o $y_2 < 0$,

$$F(y_1, y_2) = \int_{-\infty}^{y_1}\int_{-\infty}^{y_2} 0\, dy_2\, dy_1 = 0$$

Para $0 \le y_1 \le 1$ y $0 \le y_2 \le 1$

$$F(y_1, y_2) = \int_0^{y_1}\int_0^{y_2} 4st\, ds\, dt = \int_0^{y_1} 2t\, y_2^2\, dt = y_1^2\, y_2^2$$

Para $y_1 > 1$ y $0 \le y_2 \le 1$

$$F(y_1, y_2) = \int_0^{1}\int_0^{y_2} 4st\, ds\, dt = \int_0^{1} 2y_2^2 t\, dt = y_2^2$$

Para $y_2 > 1$ y $0 \le y_1 \le 1$

$$F(y_1, y_2) = \int_0^{1}\int_0^{y_1} 4st\, ds\, dt = \int_0^{1} 2y_1^2 s\, ds = y_1^2$$

Para $y_1 > 1$ y $y_2 > 1$

$$F(y_1, y_2) = \int_0^{1}\int_0^{1} 4st\, ds\, dt = \int_0^{1} 2t\, dt = 1$$

En resumen

$$F(y_1, y_2) = \begin{cases} 0, & y_1 < 0, y_2 < 0 \\ y_1^2 y_2^2, & 0 \le y_1 \le 1, 0 \le y_2 \le 1 \\ y_2^2, & y_1 > 1, 0 \le y_2 \le 1 \\ y_1^2, & y_2 > 1, 0 \le y_1 \le 1 \\ 1, & y_1 > 1, y_2 > 1 \end{cases}$$

c. Encuentre $P(y_1 \leq 1/2\,, y_2 \leq 3/4)$

$$P(y_1 \leq 1/2\,, y_2 \leq 3/4) = \int_0^{1/2}\int_0^{3/4} 4y_1y_2\, dy_2\, dy_1 = \frac{9}{64} \;\rightarrow\; \boxed{P(y_1 \leq 1/2\,, y_2 \leq 3/4) = \frac{9}{64}}$$

d. Encuentre las funciones de densidad marginal de y_1 y y_2.

$$f_1(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2)\, dy_2 = \int_0^1 4y_1y_2\, dy_2 = 2y_1 \;\rightarrow\; \boxed{f_1(y_1) = 2y_1}$$

$$f_2(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2)\, dy_1 = \int_0^1 4y_1y_2\, dy_1 = 2y_2 \;\rightarrow\; \boxed{f_2(y_2) = 2y_2}$$

e. Encuentre $P(y_1 \leq 1/2\,|y_2 \geq 3/4)$

$$P(y_1 \leq 1/2\,|y_2 \geq 3/4) = \frac{P(y_1 \leq 1/2 \cap y_2 \geq 3/4)}{P(y_2 \geq 3/4)}$$

$$P(y_1 \leq 1/2 \cap y_2 \geq 3/4) = \int_0^{1/2}\int_{3/4}^{1} 4y_1y_2\, dy_2\, dy_1 = \frac{7}{64}$$

$$P(y_2 \geq 3/4) = \int_0^{1}\int_{3/4}^{1} 4y_1y_2\, dy_2\, dy_1 = \frac{7}{16}$$

$$\rightarrow\; P(y_1 \leq 1/2\,|y_2 \geq 3/4) = \frac{7/64}{7/16} = \frac{16}{64} = \frac{1}{4} \;\rightarrow\; \boxed{P(y_1 \leq 1/2\,|y_2 \geq 3/4) = \frac{1}{4}}$$

f. Encuentre la función de densidad condicional de y_1.

$$f(y_1|y_2) = \frac{f(y_1, y_2)}{f(y_2)} = \frac{4y_1y_2}{2y_2} = 2y_1 \;\rightarrow\; \boxed{f(y_1|y_2) = 2y_1}$$

g. Encuentre la función de densidad condicional de y_2.

$$f(y_2|y_1) = \frac{f(y_1, y_2)}{f(y_1)} = \frac{4y_1y_2}{2y_1} = 2y_2 \;\rightarrow\; \boxed{f(y_2|y_1) = 2y_2}$$

h. Encuentre $P(y_1 \leq 3/4\,|y_2 = 1/2)$

$$P(y_1 \leq 3/4\,|y_2 = 1/2) = \int_{-\infty}^{3/4} f(y_1|y_2 = 1/2)\, dy_1 = \int_0^{3/4} 2y_1\, dy_1 = \frac{9}{16}$$

$$\rightarrow\; \boxed{P(y_1 \leq 3/4\,|y_2 = 1/2) = \frac{9}{16}}$$

i. ¿Son independientes y_1 y y_2?

Se tiene que las distribuciones marginales son

$$f_1(y_1) = 2y_1, \qquad f_2(y_2) = 2y_2 \;\rightarrow\; f_1(y_1) \times f_2(y_2) = 2y_1 \times 2y_2 = 4y_1y_2 = f(y_1, y_2)$$

El producto de las marginales es la distribución conjunta, por lo tanto, son independientes.

j. Encuentre $E(y_1)$.

$$E(y_1) = \int_0^1 \int_0^1 y_1(4y_1y_2)\, dy_2\, dy_1 = \int_0^1 2y_1^2\, dy_1 = \frac{2}{3} \;\rightarrow\; \boxed{E(y_1) = \frac{2}{3}}$$

k. Encuentre $Var(y_1)$.

$$Var(y_1) = E(y_1{}^2) - \left(E(y_1)\right)^2$$

$$E(y_1^2) = \int_0^1 \int_0^1 y_1^2(4y_1y_2)\, dy_2\, dy_1 = \int_0^1 2y_1^3\, dy_1 = \frac{1}{2}$$

$$Var(y_1) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18} \;\rightarrow\; \boxed{Var(y_1) = \frac{1}{18}}$$

l. Encuentre $E(y_1 - y_2)$.

$$E(y_1 - y_2) = E(y_1) - E(y_2)$$

$$E(y_2) = \int_0^1 \int_0^1 y_2(4y_1y_2)\, dy_2\, dy_1 = \int_0^1 \frac{4}{3} y_1\, dy_1 = \frac{2}{3} \;\rightarrow\; \boxed{E(y_2) = \frac{2}{3}}$$

$$\rightarrow\; E(y_1 - y_2) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0 \;\rightarrow\; \boxed{E(y_1 - y_2) = 0}$$

m. Demuestre que $Cov(y_1, y_2) = 0$.

$$Cov(y_1, y_2) = E(y_1, y_2) - E(y_1)E(y_2)$$

$$E(y_1, y_2) = \int_0^1 \int_0^1 y_1y_2(4y_1y_2)\, dy_2\, dy_1 = \int_0^1 \frac{4}{3} y_1^2\, dy_1 = \frac{4}{9}$$

$$\rightarrow\; Cov(y_1, y_2) = \frac{4}{9} - \left(\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\right) = 0 \;\rightarrow\; \boxed{Cov(y_1, y_2) = 0}$$

2.(5.4) En seguida se muestra la función de probabilidad conjunta relacionada con los datos obtenidos en un estudio sobre los accidentes de automóvil en las que viajaba un niño (de menos de 5 años de edad), de los cuales por lo menos uno resulto fatal. El estudio se concentró en determinar si el niño sobrevivió y el tipo de cinturón de seguridad que llevaba puesto, si acaso lo utilizaba. Se define

$$y_1 = \begin{cases} 0, \textit{si el niño sobrevive} \\ 1, \textit{si el niño no sobrevive} \end{cases}, \qquad y_2 = \begin{cases} 0, \textit{si no tenia puesto el cinturón de seguridad} \\ 1, \textit{si utilizaba cinturón de seguridad de adulto} \\ 2, \textit{si utilizaba cinturón de seguridad de bebé} \end{cases}$$

Observe que y_1 representa la cantidad de muertes de niños y, como los asientos para bebé por lo común tienen dos cinturones, y_2 representa el número de cinturones de seguridad utilizados en el momento del accidente.

	y_1		
y_2	0	1	
0	0,38	0,17	0,55
1	0,14	0,02	0,16
2	0,24	0,05	0,29
	0,76	0,24	1

a. Cerciórese de que la función de probabilidad satisfaga el Teorema 5.1.

Se cumple que $p(y_1, y_2) \geq 0$ para todo y_1, y_2 entro del cuadro, además de que también se cumple que

$$\sum_{y_1, y_2} p(y_1, y_2) = 0{,}38 + 0{,}14 + 0{,}24 + 0{,}17 + 0{,}02 + 0{,}05 = 1$$

Por lo que se cumple el teorema 5.1 en esta función de distribución.

b. Calcule $F(0{,}1)$. ¿Cuál es la interpretación de este valor?

$$F(0{,}1) = p(0{,}0) + p(0{,}1) = 0{,}38 + 0{,}14 = 0{,}52 \quad \rightarrow \quad \boxed{F(0{,}1) = 0{,}52}$$

La interpretación de este valor es la probabilidad de que el niño sobreviva sin utilizar el cinturón de seguridad para bebé.

c. Proporcione las funciones de probabilidad marginal de y_1 y y_2.

$$p(y_1) = \sum_{y_2} p(y_1, y_2) \quad \rightarrow \quad y_1 = 0 \quad \rightarrow \quad p(y_1 = 0) = p(0{,}0) + p(0{,}1) + (0{,}2) = 0{,}76$$

$$\rightarrow \quad y_1 = 1 \quad \rightarrow \quad p(y_1 = 1) = p(1{,}0) + p(1{,}1) + p(1{,}2) = 0{,}24$$

En resumen

y_1	0	1
$p(y_1)$	0,76	0,24

y_2	0	1	2
$p(y_2)$	0,55	0,16	0,29

d. Encuentre las probabilidades condicionales

$$P(y_2 | y_1 = 0) = \frac{P(y_2 \cap y_1 = 0)}{P(y_1 = 0)} = \frac{0{,}38}{0{,}76}, \frac{0{,}14}{0{,}76}, \frac{0{,}24}{0{,}76}$$

En resumen

$y_2 \| y_1$	0	1
0	0,5	0,71
1	0,18	0,08
2	0,32	0,21

$y_1 \vert y_2$	0	1	2
0	0,69	0,875	0,83
1	0,31	0,125	0,17

e. ¿Cuál es la probabilidad de que un niño sobreviva si viajaba en un asiento para bebé?

$$P(y_1 = 0|y_2 = 2) = \frac{P(y_1 = 0 \cap y_2 = 2)}{P(y_2 = 2)} = \frac{0,24}{0,29} = 0,83 \rightarrow \boxed{P(y_1 = 0|y_2 = 2) = 0,83}$$

La probabilidad de que un niño sobreviva si viaja en un asiento para bebé es de 0,83.

f. ¿Son independientes y_1 y y_2?

La independencia de variables aleatorias discretas exige que $P(y_1, y_2) = P_1(y_1) \times P_2(y_2)$ para toda elección de (y_1, y_2). Por lo tanto, si esta igualdad se viola en cualquier par de valores (y_1, y_2), las variables aleatorias son dependientes. Se tiene que $P(0,0) = 0,38$, por otro lado $P_1(0) = 0,76$ y $P_2(0) = 0,55$, entonces

$$P_1(0) \times P_2(0) = 0,76 \times 0,55 = 0,418 \neq 0,38 = P(0,0)$$

Por lo tanto y_1 y y_2 son dependientes.

3.(5.16) Un sistema electrónico tiene cada uno de los dos tipos diferentes de componentes en operación conjunta. Si y_1 y y_2 representan las duraciones aleatorias de los componentes 1 y 2, respectivamente, la función de densidad conjunta está determinada por la expresión

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{1}{8}\, y_1\, exp\left\{\frac{-(y_1 + y_2)}{2}\right\}, & y_1 > 0, y_2 > 0 \\ 0, & otro\ caso \end{cases}$$

Las mediciones se expresan en cientos de horas.

a. Calcule $P(y_1 > 1, y_2 > 1)$.

$$P(y_1 > 1, y_2 > 1) = \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{1}{8}\, y_1\, exp\left(-\frac{(y_1 + y_2)}{2}\right) dy_2\, dy_1$$

$$= \int_1^\infty \frac{1}{4}\, y_1 e^{-y_1/2} \left[\int_1^\infty \frac{1}{2}\, e^{\frac{-(y_2 - 1 + 1)}{2}}\right] dy_2\, dy_1$$

Ya que $e^{\frac{-(y_1+y_2)}{2}} = e^{\frac{-y_1}{2}}\, e^{\frac{-y_2}{2}}$. Sea $y^* = y_2 - 1, dy^* = dy_2, y_2 = 1 \rightarrow y^* = 0, y_2 = \infty \rightarrow y^* = \infty$, entonces

$$\int_1^\infty \frac{1}{4}\, y_1\, e^{\frac{-y_1}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}} \left[\int_0^\infty \frac{1}{2}\, e^{-\frac{y^*}{2}}\, dy^*\right] dy_1 = \int_1^\infty \frac{1}{4}\, y_1\, e^{\frac{-y_1}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}}\, dy_1$$

Ya que $y^* \sim Exponencial(\beta = 2)$, entonces

$$\frac{1}{2}\int_{1}^{\infty}\frac{1}{2}\,y_1\,exp\left(\frac{-(y_1+1)}{2}\right)\,dy_1=\frac{1}{2}\int_{1}^{\infty}\frac{1}{2}\,y_1\,exp\left(\frac{-(y_1-1+2)}{2}\right)\,dy_1=\frac{1}{2e}\int_{1}^{\infty}\frac{1}{2}\,y_1\,e^{\frac{-(y_1-1)}{2}}\,dy_1$$

Se colocó y_1-1 porque el límite inferior es 1, y se hace el siguiente cambio: $y=y_1-1, dy=dy_1, y_1=1\rightarrow y=0, y_1=\infty\rightarrow y=\infty$, entonces

$$\frac{1}{2e}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{2}(y+1)e^{-\frac{y}{2}}\,dy=\frac{1}{2e}\left[\int_{0}^{\infty}\frac{1}{2}ye^{-\frac{y}{2}}\,dy+\int_{0}^{\infty}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}\,dy\right]=\frac{1}{2e}[2+1]=\frac{3}{2e}$$

Ya que $y\sim Exponencial(\beta=2)$ y $E(y)=\beta=2$, por lo tanto, $\boxed{P(y_1>1,y_2>1)=3/2e}$

b. Calcule la probabilidad de que la vida útil de un componente tipo 2 supere las 200 horas.

Probabilidades marginales.

$$f_1(y_1)=\int_{0}^{\infty}\frac{1}{8}y_1\,exp\left(\frac{-(y_1+y_2)}{2}\right)\,dy_2=\frac{1}{4}y_1e^{-\frac{y_1}{2}}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{2}\,e^{-\frac{y_2}{2}}\,dy_2=\frac{1}{4}y_1e^{-\frac{y_1}{2}}\ \rightarrow\ \boxed{f_1(y_1)=\frac{1}{4}y_1e^{-\frac{y_1}{2}}}$$

$$f_2(y_2)=\int_{0}^{\infty}\frac{1}{8}y_1\,exp\left(\frac{-(y_1+y_2)}{2}\right)\,dy_1=\frac{1}{4}e^{-\frac{y_2}{2}}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{2}\,y_1\,e^{-\frac{y_1}{2}}\,dy_1=\frac{2}{4}e^{-\frac{y_2}{2}}\ \rightarrow\ \boxed{f_2(y_2)=\frac{1}{2}e^{-\frac{y_2}{2}}}$$

Ya que $E(y_1)=2$. Ahora

$$f_2(y_2\geq 2)=\int_{2}^{\infty}\frac{1}{2}e^{-\frac{y_2}{2}}\,dy_2$$

Se hacen los siguientes cambios: $y=-\frac{y_2}{2}, dy=-\frac{dy_2}{2}, y_2=2\rightarrow y=-1, y_2=\infty\rightarrow y=-\infty$, entonces

$$-\int_{-1}^{-\infty}e^{y}\,dy=\int_{-\infty}^{-1}e^{y}\,dy=e^{-1}\cong 0{,}3679\ \rightarrow\ \boxed{f_2(y_2\geq 2)\cong 0{,}3679}$$

La probabilidad de que la vida útil de un componente tipo 2 supere las 200 horas es de 0,3679.

c. ¿Son independientes y_1 y y_2?

Se tiene que las distribuciones marginales son:

$$f_1(y_1)=\frac{1}{4}y_1e^{-\frac{y_1}{2}},\qquad f_2(y_2)=\frac{1}{2}e^{-\frac{y_2}{2}}$$

Entonces

$$f_1(y_1) \times f_2(y_2) = \frac{1}{4} y_1 e^{-\frac{y_1}{2}} \times \frac{1}{2} e^{-\frac{y_2}{2}} = \frac{1}{8} y_1 e^{\frac{-(y_1+y_2)}{2}} = f(y_1, y_2)$$

El producto de las marginales es la distribución conjunta, por lo tanto y_1 y y_2 son independientes.

d. Una forma de medir la eficiencia relativa de los dos componentes consiste en calcular la razón y_2/y_1. Determine $E(y_2/y_1)$.

Como ya se demostró, y_1 y y_2 son independientes, entonces se puede escribir $E(y_2/y_1) = E(y_2) \cdot E(1/y_1)$.

$$E(y_2) = \int_0^\infty y_2 f_2(y_2)\, dy_2 = \int_0^\infty y_2 \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{y_2}{2}}\right) dy_2 \overset{(*)}{=} 2$$

Ya que $(*)$ es la esperanza de una distribución exponencial con $\beta = 2$, entonces $E(y_2) = 2$.

$$E(1/y_1) = \int_0^\infty \frac{1}{y_1} f_1(y_1) = \int_0^\infty \frac{1}{y_1} \left(\frac{1}{4} y_1\, e^{-\frac{y_1}{2}}\right) dy_1 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{2}\, e^{-\frac{y_1}{2}}\, dy_1 \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}$$

Ya que en $(*)$, $y_1 \sim Exponencial(\beta = 2)$ lo cual integra a uno, por lo tanto $E(1/y_1) = 1/2$.
Por lo tanto

$$E(y_2/y_1) = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \;\rightarrow\; \boxed{E(y_2/y_1) = 1}$$